Schulstunde

Wachstum 1

Berechnung des prozentualen Wachstums (exponentielles Wachstum)

ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 18811

Stand . 12. April 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Wachstum ist ein beliebtes Thema zur Anwendung der Mathematik.
Dabei gibt es viele Arten von Wachstum.

Am einfachsten ist das lineare Wachstum.
Dabei nimmt eine Größe in gleichen Zeitabschnitten immer um denselben Betrag zu.

Die nächste Stufe ist das prozentuale Wachstum.
Dabei nimmt eine Größe in gleichen Zeitabschnitten immer um denselben Prozentsatz zu.
Weil das zu einer Berechnungsfunktion führt, bei der der Zeitabschnitt im Exponenten steht, nennt man diese Art des Wachstums auch ein exponentielles Wachstum.
Diese Wachstumsart ist für den Unterricht wohl am interessantesten. Sie ist nicht schwer zu berechnen und bietet doch viele Möglichkeiten der Anwendung.
Dies ist auch der Inhalt dieser aufgeschriebenen Schulstunde.

Ich gliedere den Text in 20 kleine Abschnitte, damit ich dir auch Fragen stellen kann, die ich erst im nächsten Abschnitt beantworte, also auf der nächsten Seite, außerhalb deines Blickfeldes.
Du willst ja mit diesem Text lernen. Dazu muss man selbst nachdenken – sonst klappt das nicht so recht mit dem Lernprozess.

Hinweis: **Es entstehen mehrere Schulstunden zum Thema Wachstum.**

In 18812 lernen wir etwas über die prozentuale Abnahme. Dazu wird auch das Beispiel des radioaktiven Zerfalls gehören.

In 18822 geht es um die begrenzte Zunahme

In 18823 geht es um die begrenzte Abnahme

In 18833 sprechen wir über das logistische Wachstum

$\boxed{1}$ Wir beginnen mit einem Thema aus Klasse 6 oder 7.

Beispiel 1: Preisaufschlag

Ein Computerchip kostet 120 €. Durch einen vorübergehenden Lieferengpass erhöhen die Hersteller den Preis um 15%. Wie viel kostet er dann?

Fangen wir damit an, dass wir die **Preiszunahme** berechnen. In der Aufgabe wird sie beschrieben:

Preiszunahme = $\boxed{15\%\text{ von}}$ 120 €

d. h. Preiszunahme = $\boxed{15\%\ \textbf{mal}}$ 120 €

also: Preiszunahme = $\boxed{\frac{15}{100}\text{mal}}$ 120 €

d. h. Preiszunahme = $\boxed{\mathbf{0{,}15}\cdot 120\text{ €}}$

Das ist alles das gleiche!

Den ersten Schritt haben wir geschafft. Gesucht ist jedoch der neue Preis, also nach der Zunahme.

Ganz einfach: Neuer Preis = Alter Preis + Preiszunahme

Ergebnis: Neuer Preis = 120 € + $0{,}15\cdot 120$ €

Jetzt klammert man den in beiden Summanden steckenden alten Preis 120 € aus.
Dann entsteht diese Gleichung:

Neuer Preis = $(1+0{,}15)\cdot 120$ €

d. h. Neuer Preis = $\mathbf{1{,}15}\cdot 120$ € $= 138$ €

Ergebnis: Neuer Preis = **Wachstumsfaktor** $\cdot\,120$ €

Berechne folgende neuen Preise:

a) Alter Preis 34 €, Preiserhöhung um 20%

b) Alter Preis 63 €, Preiserhöhung um 45%

Meine Lösung steht auf der nächsten Seite im Abschnitt $\Rightarrow \boxed{2}$

$\boxed{11}$ **Wachstum von Bakterien.**

m(t) sei eine Menge von Bakterien einer Beobachtungsreihe zum Zeitpunkt t. Sie wächst exponentiell gemäß der Formel: $\boxed{m(t)=50\cdot 1{,}4^t}$, wobei t die **Zeit in Stunden** ist, $t\in\mathbb{N}_0$.

a) Erkläre, was die Zahlen 50 und 1,4 in dieser Gleichung bedeuten.

m(0) = 50 ist der Anfangswert. Zur Zeit t = 0 sind 50 Bakterien vorhanden.
Sie mehren sich mit dem Wachstumsfaktor q = 1,4. Aus $q=1+p$ folgt, dass p = 0,4 ist.
Das heißt: Der Bestand m(t) von Bakterien vermehrt sich pro Zeiteinheit (Stunden) um 40%.

b) Berechne die nach 5 Stunden vorhandene Menge Bakterien. $m(5)=50\cdot 1{,}4^5\approx 268{,}9$

Es sind dann also 268 Bakterien vorhanden

c) Zu welchem Zeitpunkt hat der Bakterienstamm mehr als 100.000 Individuen? $\Rightarrow \boxed{12}$

$\boxed{2}$ Hier meine Lösung:

a) Alter Preis 34 €, Aufschlag 20%

Neuer Preis = (Alter Preis) · Wachstumsfaktor = $34\,€\cdot\boxed{1{,}20}=40{,}80\,€$

b) Alter Preis 63 €, Aufschlag 45% Neuer Preis = $63\,€\cdot\boxed{1{,}45}=72{,}45\,€$

Im Park steht ein „Mathematik-Baum“. Laut Beschreibung wächst er jedes Jahr um 5 %. Heute hat er eine Höhe von 2,00 m. Berechne, wie sich seine Höhe in den nächsten 10 Jahren entwickelt.

Wir beginnen die Lösung gemeinsam, Mache du den Rest.

Beginn der Beobachtung:	März 2023:	$h_o = 2{,}00\,m$
Nach 1 Jahr:	März 2024:	$h_1 = h_0\cdot\boxed{} = \boxed{}$ m
Nach 2 Jahren:	März 2025:	$h_2 = h_1\cdot\boxed{} = h_o\cdot\boxed{} = \boxed{}$ m
Nach 3 Jahren:	März 2026:	$h_3 =$
Nach 4 Jahren:	März 2027:	$h_4 =$
Nach 5 Jahren:	März 2028:	$h_5 =$ $\Rightarrow$ $\boxed{3}$

$\boxed{12}$ Mehr als 100.000 Individuen heißt: $m(t) > 100.000$

d. h. $50\cdot 1{,}4^t > 100.000$

$$1{,}4^t > \frac{100.000}{50}$$

Nun wird logarithmiert und umgeformt: $t\cdot\log 1{,}4 > \log 100.000 - \log 50$

$$t > \frac{\log 100.000 - \log 50}{\log 1{,}4} = 22{,}5...$$

Ergebnis: Nach 23 Stunden umfasst der Bakterienstamm mehr als 100.000 Individuen.

Die Aufgabe geht weiter:

d) In welcher Zeitspanne Δt hat sich eine beliebige Menge m(t) verdoppelt?

Die Berechnung der Verdopplungsdauer ist eine Grundaufgabe, deren Ansatz man üben sollte:

Bedingung: $m(t+\Delta t) = 2\cdot m(t)$

d. h. $50\cdot 1{,}4^{t+\Delta t} = 2\cdot 50\cdot 1{,}4^t$ |:50

$1{,}4^{t+\Delta t} = 2\cdot 1{,}4^t$

Potenzgesetz: $1{,}4^{t+\Delta t} = 1{,}4^t\cdot 1{,}4^{\Delta t}$

Also: $1{,}4^t\cdot 1{,}4^{\Delta t} = 2\cdot 1{,}4^t$ | $:1{,}4^t$

$\boxed{1{,}4^{\Delta t} = 2}$

Logarithmieren: $\Delta t\cdot\log 1{,}4 = \log 2 \Rightarrow \Delta t = \frac{\log 2}{\log 1{,}4} \approx 2{,}06$

Ergebnis: Der Bakterienstamm verdoppelt sich in der Zeitspanne $\Delta t = 2$ Stunden. $\Rightarrow$ $\boxed{13}$

$\boxed{3}$ In jedem Jahr nimmt die Höhe um 5 % zu, d.h. jedes Mal kommt der Faktor 1,05 dazu:

Beginn der Beobachtung:	März 2023:	$h_o = 2{,}00\,m$
Nach 1 Jahr:	März 2024:	$h_1 = h_0 \cdot \boxed{1{,}05} = 2{,}10\text{ m}$
Nach 2 Jahren:	März 2025:	$h_2 = h_1 \cdot \boxed{1{,}05} = h_o \cdot \boxed{1{,}05^2} = 2{,}205\text{ m}$
Nach 3 Jahren:	März 2026:	$h_3 = h_2 \cdot \boxed{1{,}05} = h_0 \cdot \boxed{1{,}05^3} \approx 2{,}315\text{ m}$
Nach 4 Jahren:	März 2027:	$h_4 = h_3 \cdot \boxed{1{,}05} = h_o \cdot \boxed{1{,}05^4} \approx 2.431\text{ m}$
Nach 5 Jahren:	März 2028:	$h_5 = h_4 \cdot \boxed{1{,}05} = h_o \cdot \boxed{1{,}05^5} \approx 2{,}553\text{ m}$

Wie hoch ist der Baum nach 10 Jahren?

Kannst du durch Probieren herausfinden, ab wann er höher als 20 m sein wird? $\Rightarrow$ $\boxed{4}$

$\boxed{13}$ Es gibt so allerlei Fragen zum prozentualen bzw. exponentiellen Wachstum.

Diese hier müssen wir uns gemeinsam anschauen:

> Nach 7 Stunden sind 338 Bakterien vorhanden, nach 15 Stunden 7778.
> Wie kann man daraus die Bestandsfunktion m(t) aufstellen?

Wir benötigen die Formel für das prozentuale (exponentielle) Wachstum: $m(t) = m(0) \cdot q^t$

Sie enthält zwei Unbekannte: m(0) und q. Zu ihrer Bestimmung benötigt man zwei Gleichungen. Und die haben wir gegeben:

Nach 7 Stunden sind 338 Bakterien vorhanden: $m(7) = \boxed{m(0) \cdot q^7 = 338}$ (1)

Nach 15 Stunden sind 7778 Bakterien vorhanden: $m(15) = \boxed{m(0) \cdot q^{15} = 7778}$ (2)

Wir lösen mit dem Divisionstrick: $\frac{(2)}{(1)}$: $\frac{m(0) \cdot q^{15}}{m(0) \cdot q^7} = \frac{7778}{338} \Leftrightarrow q^8 = \frac{7778}{338}$

Dann ist $q = \sqrt[8]{\frac{7778}{338}} \approx 1{,}48$

Diesen Wert setzt man in (1) ein $338 = m(0) \cdot 1{,}48^7 \Rightarrow m(0) = \frac{338}{1{,}48^7} \approx 21{,}7$

(Achtung: Muss ganzzahlig sein!) Ergebnis: $m(t) = 21{,}7 \cdot 1{,}48^t$

Nun eine Aufgabe für dich:

> Die Oberfläche eines Schimmelpilzes vergrößert sich pro Tag um 10%. Solange er sich ungestört ausbreiten kann, wächst seine Oberfläche exponentiell.
> Stelle die Wachstumsgleichung auf, wenn zu Beginn der Beobachtung die Oberfläche 2 cm^2 groß war. Wie groß ist die Pilzfläche nach 1 Woche? Wann ist sie dreimal so groß geworden?

$\Rightarrow$ $\boxed{14}$

$\boxed{4}$ Hast du das Berechnungsprinzip entdeckt:

Jede Zunahme wird durch eine neuen Faktor 1,05 realisiert.

Nach 10 Jahren gilt: $h_{10} = h_0 \cdot \boxed{\mathbf{1{,}05^{10}}} \approx 3{,}258$ m

Und die Höhe von 20 m wird nach 48 Jahren überschritten:

Dazu berechnet man die Höhen nach 47 und nach 48 Jahren.

2×1.05^{47}	19.811
2×1.05^{48}	20.802

Und wir haben auch schon eine Berechnungsformel: $\boxed{h_n = h_o \cdot 1{,}05^n}$

wobei h_0 die Anfangshöhe ist und n die Anzahl der verstrichenen Jahre.

Jetzt müssen wir einige Begriffe lernen:

Ich bezeichne jetzt die Größe, die sich prozentual vermehrt mit a(t). Der Parameter t gibt an, zu welchem Zeitpunkt dieser Wert gilt. Wenn sich a(t) in einer bestimmten Zeitspanne Δt um p%

vergrößert, dann erreicht sie den Wert $\underbrace{a(t+\Delta t)}_{\text{Neuer Bestand}} = \underbrace{a(t)}_{\text{alter Bestand}} + \underbrace{a(t)\cdot\frac{p}{100}}_{\text{Zuwachs}}$

Durch Ausklammern folgt: $\boxed{a(t+\Delta t) = a(t)\cdot\left[1+\frac{p}{100}\right]}$

Statt $a(t)$ kann man auch a_n sagen und statt $a(t+\Delta t)$ auch a_{n+1}. Das ist nur eine Frage der Bezeichnung: Mit t gibt man Zeitpunkte an, mit n wurde einfach nummeriert.

Den Ausdruck $q = \left[1+\frac{p}{100}\right]$ nennt man **Wachstumsfaktor**. Er entsteht durch das Ausklammern.

Man könnte dann die Wachstumsformel so schreiben: $\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$ und $\boxed{a_n = a_0 \cdot q^n}$

Hilfreich ist auch diese Art der Darstellung der Berechnung.

$$a_0 \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_1 = a_0\cdot q} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_2 = a_0\cdot q^2} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3 = a_0\cdot q^3} \xrightarrow{\cdot q} \ldots\ldots \boxed{a_{n-1} = a_0\cdot q^{n-1}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_n = a_0\cdot q^n}$$

Daraus erkennt man, wie man die Zuwächse an beliebigen Stellen berechnen kann:

Von a_1 bis a_3 gilt: $a_3 = a_2 \cdot q^2$

Von a_2 bis a_6 gilt: $a_6 = \boxed{??}$ Von a_4 bis a_{10} gilt: $a_{10} = \boxed{??}$ $\Rightarrow$ $\boxed{5}$

$\boxed{14}$ Es sei O(t) die Oberfläche des Schimmelpilzes zum Zeitpunkt t.

Für das prozentuelle Wachstum gilt eine Exponentialfunktion: $O(t) = O(0)\cdot q^t$

$O(0) = 2\ (cm^2)$ ist der Startwert. t ist die Zeit in Tagen,

q ist der Wachstumsfaktor: $q = 1+p = 1+10\% = 1+0{,}1 = 1{,}1$

Daraus ergibt sich die Wachstumsfunktion: $\boxed{O(t) = 2\cdot 1{,}1^t}$

Nun berechne O(7) und die Zeit für die dreifache Anfangsgröße.

$\Rightarrow$ $\boxed{15}$

$\boxed{5}$ Von a_1 bis a_3 gilt: $a_3 = a_1 \cdot q^2$ $\quad a_1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} a_3$

Von a_2 bis a_6 gilt: $a_6 = a_2 \cdot q^4$ $\quad a_2 \xrightarrow{\cdot q} a_3 \xrightarrow{\cdot q} a_4 \xrightarrow{\cdot q} a_5 \xrightarrow{\cdot q} a_6$

Von a_4 bis a_{10} gilt: $a_{10} = a_4 \cdot q^6$ $\quad a_4 \xrightarrow{\cdot q} a_5 \xrightarrow{\cdot q} a_6 \xrightarrow{\cdot q} a_7 \xrightarrow{\cdot q} a_8 \xrightarrow{\cdot q} a_9 \xrightarrow{\cdot q} a_{10}$

Man nennt die Werte in ihrer Gesamtheit eine Folge, genauer: **eine geometrischer Folge.**

Und geometrische Folgen haben zwei Merkmale:

Das erste kennst du schon: Der Nachfolger entsteht aus dem Vorgänger durch Multiplikation mit stets dem gleichen Faktor q.

Das zweite Merkmal: Der Quotient aufeinander folgender Glieder ist stets konstant.

Ich gebe Dir gleich eine passende Miniaufgabe:

Untersuche, ob diese Folge durch prozentuales Wachstum entstanden ist:

$a_1 = \frac{16}{9}$, $\quad a_2 = 2$ $\quad a_3 = \frac{9}{4}$ $\quad a_4 = \frac{81}{32}$. $\quad \Rightarrow \boxed{6}$

$\boxed{15}$ Für den Schimmel haben wir die Wachstumsfunktion: $O(t) = 2 \cdot 1{,}1^t$

Daraus erhält man $O(7) = 2 \cdot 1{,}1^7 \approx 3{,}897 \left(cm^2\right)$

Und die dreifache Anfangsgröße gilt: $3 \cdot O(0) = O(0) \cdot 1{,}1^t$

$3 = 1{,}1^t$

Eine solche Exponentialgleichung lösen wir durch Logarithmieren:

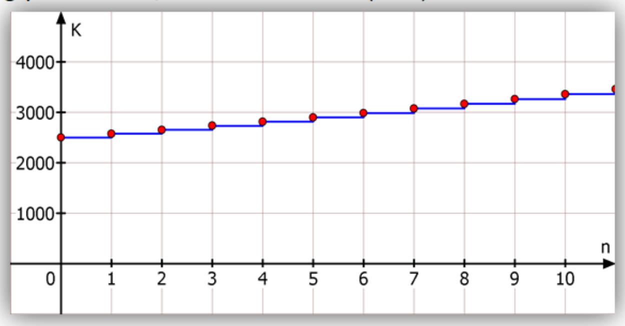
$$\log 3 = \log 1{,}1^t \quad \Rightarrow \quad t \cdot \log 1{,}1 = \log 3 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\log 3}{\log 1{,}1} \approx 11{,}5 \quad \text{(Tage)}$$

Es gibt stetiges und sprunghaftes Wachstum.

Wir stellen uns vor, was eine Bank macht. Du hast auf deinem Konto eine bestimmte Summe $K(0) = 2500€$. Nehmen wir einmal an, dass die Bank einmal im Monat verzinst. Dann bleibt dein Kontostand solange auf 2500 €, bis die Verzinsung passiert ist, d.h. bis der Zins (3 %) also $2500€ \cdot 0{,}03$ dazu gebucht wird.

Dann steigt die Kontostand sprunghaft auf $K(1) = 2500\text{ €} \cdot 1{,}03 = 2575\text{ €}$ an.

Dieser Betrag ändert sich einen Monat lang nicht und springt am Monatsende auf $K(2) = K(1) \cdot 1{,}03$ oder was dasselbe ist, auf



$K(2) = 2500 \cdot 1{,}03^2 = 2652{,}25\text{ €}$. Das Schaubild zeigt diese Treppenkurve. Sie macht immer am Monatsende einen Sprung. Das ist **sprunghaftes Wachstum**.

Die Gleichung $K(n) = 2500\text{ €} \cdot 1{,}03^n$ gilt also nicht für beliebiges n, sondern nur für ganzzahliges n bis zur nächsten ganzen Zahl.

$\boxed{6}$ Gegeben ist $a_1 = \frac{16}{9}$, $a_2 = 2$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_4 = \frac{81}{32}$.

Man überprüft paarweise, ob $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ immer dieselbe Zahl q ergibt:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{\frac{16}{9}} = \frac{2 \cdot 9}{16} = \frac{9}{8} = 1{,}125$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{9}{4}}{2} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{81}{32}}{\frac{9}{4}} = \frac{81}{32} \cdot \frac{4}{9} = \frac{9}{8}$$

Ergebnis: Jedes Glied entsteht aus dem Vorgänger durch Multiplikation mit $q = \frac{9}{8} = 1{,}125$.

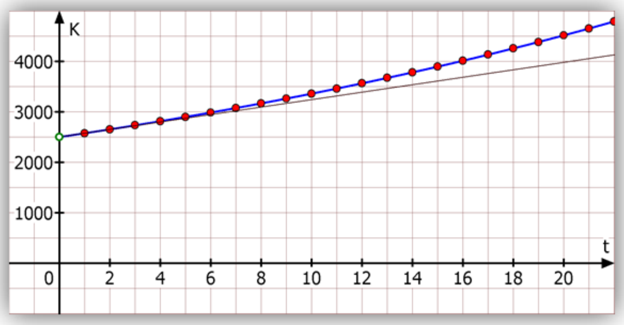
Also liegt ein Teil einer geometrischen Folge vor, und die Glieder entstehen durch prozentuales Wachstum.

Um wieviel Prozent wachsen die Glieder dieser Folge?

Wie lautet das Glied a_{10} als Dezimalzahl (Näherungsweise) $\Rightarrow$ $\boxed{7}$

$\boxed{16}$ Das exponentielle Wachstum des Schimmelpilzes ist dagegen ein **stetiges Wachstum**.

Seine Oberfläche wächst kontinuierlich, bleibt also nicht beim Bankkonto oder bei der Anzahl der Bakterien eine Zeitspanne lang konstant.



Das Schaubild simuliert eine stetiges Wachstum vom Anfangswert $K(0)$ aus bei einem Wachstumsfaktor q = 1,03, was einem prozentualen Wachstum von 3 % in der angegebenen Zeiteinheit bedeutet. So entsteht eine nach oben gekrümmte Kurve. Um diese Krümmung besser zu erkennen, habe ich im Startpunkt die Tangente eingezeichnet.

Diese Tangente gehört zum linearen Wachstum, bei dem in der gleichen Zeitspanne immer derselbe Wert addiert wird. Beim prozentualen Wachstum wird er multipliziert.

Wenn du in der Oberstufe bist und schon Ableiten gelernt hast, dann lies bitte in Abschnitt $\boxed{17}$ weiter. Dort geht es darum, wie man die Zunahme des Bestands berechnen kann.

Wenn du das nicht wissen willst, ist dieser 1. Teil der Schulstunde Wachstum beendet.

$\boxed{7}$ Der Wachstumsfaktor setzt sich zusammen aus $\boxed{q = 1 + \frac{p}{100}}$

Also ist $\frac{p}{100} = q - 1 = 0{,}125 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}125 = 12{,}5\%$.

Das Ergebnis heißt 12,5 %.

Und $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^9 = 2 \cdot \frac{9^8}{8^8} \approx 5{,}13$

Achtung: $a_{10} = a_1 \cdot q^{10}$ **ist falsch.**

Man kann es sich nach dem <u>Lattenzaunprinzip</u> merken:

Zwischen der 1. Latte (a_1) und der 3. Latte (a_3) hat es 2 Zwischenräume: $a_3 = a_1 \cdot q^2$

Zwischen der 1. Latte (a_1) und der 10. Latte (a_{10}) hat es 9 Zwischenräume: $a_{10} = a_1 \cdot q^9$

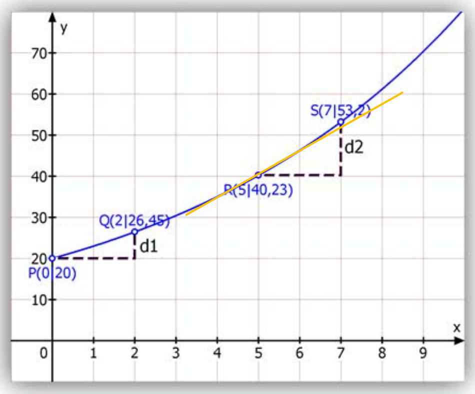
Zwischen der 1. Latte (a_1) und der n-ten Latte (a_n) hat es n-1 Zwischenräume: $a_{10} = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Jetzt rechnen wir ein paar Anwendungsaufgaben durch:

Klaus Anton legt 2.500 € bei einer Bank an. Nach 3 Jahren lautet der Kontostand 2828,41 €.
Mit welchem Zinssatz hat die Bank hier gearbeitet? $\Rightarrow \boxed{8}$

$\boxed{17}$ Wenn man die Wachstumsfunktion $B(t) = B(0) \cdot q^t$ (B = irgendein Bestand) zeichnet, erhält man bei stetigem Wachstum die berühmte Exponentialkurve.

Hier ist $B(t) = 20 \cdot 1{,}15^t$ (t in h)



Zwischen den Zeitpunkten t = 0h und t = 2h nimmt B um d_1 = B(2) – B(0) = 6,45 zu.

Das gibt eine mittlere Zunahme um

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{6{,}45}{2} = 3{,}225 \left(\frac{\text{Einheiten}}{\text{h}}\right)$$

Das entspricht der Steigung der Sekante PQ.

Betrachtet man das Zeitintervall von t = 5 h bis t = 7 h,

erhält man eine mittlere Zunahme um $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{53{,}2 - 40{,}23}{2} = \frac{12{,}97}{2} \approx 6{,}485 \left(\frac{\text{Einheiten}}{\text{h}}\right)$

Da sich diese Werte immer auf ein Zwei-Stunden-Intervall beziehen, ist ihre Aussagekraft nicht gut. Wichtiger ist es, eine punktuelle Aussage zu erhalten, also wie sich das Wachstum zu einem bestimmten Zeitpunkt verhält. Dazu benötigt man die Tangente. Ich habe sie am Punkt R mit orange eingezeichnet. Man sieht, dass dann nach 2 Sekunden die Zunahme geringer ist (bei d2). Weil eben die Tangente angibt, wie stark B zunimmt (bei einer momentan konstanten Zunahme)

Die momentane Zunahme pro Zeiteinheit (hier h) wird also durch die Tangentensteigung berechnet. Wenn du gelernt hast, dass man diese mit der Ableitung erhält, dann finde heraus, was $B'(t)$ ist.

$\boxed{8}$ K(n) sei der Kontostand nach n Jahren.

Gegeben sind $K(0) = 2500$ € und $K(3) = 2828{,}14$ €. p ist gesucht.

Es gilt die Wachstumsgleichung: $K(3) = K(0) \cdot q^3$ d. h. $2500 \cdot q^3 = 2828{,}14$

Umstellen nach q: $q^3 = \dfrac{2828{,}14}{2500}$

Man muss die 3. Wurzel ziehen: $q = \sqrt[3]{\dfrac{2828{,}14}{2500}} \approx 1{,}042$

$\sqrt[3]{\dfrac{2828.41}{2500}}$ 1.04199

Wegen $q = 1 + p$ folgt: $p = q - 1 = 0{,}042 = 4{,}2\%$

denn $0{,}042 = \dfrac{4{,}2}{100} = 4{,}2\%$

Zur Umwandlung in % verschiebt man das Komma um 2 Stellen nach rechts!

Ergebnis: Die Bank hat einen Zinssatz von 4,2% zugrunde gelegt.

Nächste Aufgabe: Klaus hatte nach 3 Jahren einen Kontostand von 2828,41 € und nach 5 Jahren 3070,99 €. Stelle die Kontostandsfunktion auf. Wie wurde verzinst und wie war der anfängliche Kontostand? $\Rightarrow$ $\boxed{9}$

$\boxed{18}$ Gegeben sei $B(t) = B(0) \cdot q^t$

Dann folgt: $B'(t) = B(0) \cdot q^t \cdot \ln q$

Mit Zahlen: $B(t) = 20 \cdot 1{,}15^t$ $\Rightarrow$ $B'(t) = 20 \cdot 1{,}15^t \cdot \ln 1{,}15$

$B'(t) = 2{,}795 \cdot 1{,}15^t$

Zum Zeitpunkt t = 5 h: $B'(5) = 2{,}795 \cdot 1{,}15^5 \approx 5{,}6 \left(\dfrac{\text{Einh.}}{\text{h}}\right)$

Die momentane Zunahme zum Zeitpunkt t = 5 h beträgt also 5,6 Einheiten pro Stunde.

Im Abschnitt $\boxed{17}$ hatten wir berechnet, dass die durchschnittliche Steigung, also die Zunahme im Intervall von 5 h bis 7 h $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = \dfrac{53{,}2 - 40{,}23}{2} = \dfrac{12{,}97}{2} \approx 6{,}485 \left(\dfrac{\text{Einheiten}}{\text{h}}\right)$ war. Das war die Sekantensteigung.

Man sieht also, die Ableitung der exponentiellen Bestandsfunktion liefert das momentane Wachstum zu jedem Zeitpunkt. Man nennt sie die ***Wachstumsrate***.

Aufgabe:

Eine Pflanze beginnt ihr Wachstum exponentiell. Man hat herausgefunden, dass die Funktion $g(t) = 30{,}05 \cdot 1{,}00564^t$ recht gut das anfängliche Wachstum beschreibt. (t in Tagen, g in cm).

Berechne die Wachstumsrate nach t = 40 Tagen. $\Rightarrow$ $\boxed{19}$

$\boxed{9}$ Ansatz für die Kontostandsfunktion: $K(n) = K(0) \cdot q^n$

Bekannt: $K(3) = 2828{,}41$ eingesetzt: $2828{,}41 = K(0) \cdot q^{\boxed{3}}$ (1)

$K(5) = 3070{,}99$ eingesetzt: $3070{,}99 = K(0) \cdot q^{\boxed{5}}$ (2)

Hier liegen 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten vor. Weil diese Unbekannten miteinander multipliziert werden, führt die Division beider Gleichungen zur Elimination von a:

$$\frac{(2)}{(1)}: \qquad \frac{3070{,}99}{2828{,}41} = \frac{\cancel{K(0)} \cdot q^5}{\cancel{K(0)} \cdot q^3} = q^2$$

Also folgt: $q_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3070{,}99}{2828{,}41}} = \pm 1{,}042$

Nur die positive Lösung ist brauchbar: $q = 1{,}042$.

Eingesetzt in (1): $2828{,}41 = K(0) \cdot 1{,}042^3$

Daraus folgt: $K(0) = \frac{2828{,}41}{1{,}042^3} \approx 2500$

Ergebnis: $\boxed{K(n) = 2500 \cdot 1{,}042^n}$

```
√(3070.99/2828.41)
                1.04200072
2828.41/Ans³
                2499.990203
```

Das heißt: Es war $K(0) = 2500$ und p = 4,2%.

Aufgabe: Nach wieviel Jahren hat dieses Konto einen Kontostand von mehr als 10.000 € $\Rightarrow \boxed{10}$

$\boxed{19}$ Ein Pflanzenwachstum ist gegeben durch $g(t) = 30{,}05 \cdot 1{,}00564^t$.

g(0) = 30,05 cm ist die Größe zu Beginn der Beobachtung (t = 0).

p = 0,00564, also 0,564 % ist die Zunahme pro Tag.

Die momentane Wachstumsrate ist die Ableitung der Wachstumsfunktion:

1. Möglichkeit: $g(t) = 30{,}05 \cdot 1{,}00564^t \quad \Rightarrow \quad R(t) = g'(t) = \underbrace{30{,}05 \cdot \ln(1{,}00564)}_{0{,}169} \cdot 1{,}00564^t$

Dahinter steckt die Ableitungsregel: $\boxed{g(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = a^x \cdot \ln(a)}$

2. Möglichkeit: Umrechnung auf die Basis e (Eulersche Zahl):

Ansatz: $e^k = 1{,}00564 \quad \Leftrightarrow \quad k = \ln(1{,}00564) \approx 0{,}00562$

Also ist $g(t) = 30{,}05 \cdot e^{0{,}00562 \cdot t}$

Und davon die Ableitung: $R(t) = g'(t) = \underbrace{30{,}05 \cdot \underbrace{0{,}00562}_{\text{innere Ableitung}}}_{0{,}169} \cdot e^{0{,}00562 \cdot t}$

Ergebnis: Momentane Wachstumsrate: $R(t) = 0{,}169 \cdot 1{,}00564^t$

Oder: $R(t) = 0{,}169 \cdot e^{0{,}00562 \cdot t}$

Folgerung: $R(40) \approx 0{,}212$ cm / Tag $\Rightarrow \boxed{20}$

$\boxed{10}$ Ausgehend von $K(3) = 2828{,}41$ rechne ich n Jahre weiter.

Dann lautet der Kontostand $K(n) = 2828{,}41 \cdot 1{,}042^n$ und das soll mehr als 10.000 € sein:

d. h. $2828{,}41 \cdot 1{,}042^n > 10.000$

$$1{,}042^n > \frac{10.000}{2828{,}41}$$

Für Gleichungen, deren Unbekannte im Exponenten stehen, gibt es einen Lösungstrick:

Man logarithmiert die Gleichung. Dabei hilft die 3. Logarithmusregel: $\boxed{\log a^n = n \cdot \log a}$.

Dabei kommt also die Unbekannte, hier ist es n, aus dem Exponenten heraus.

Mit Zahlen: $\boxed{\log 1{,}042^n > \log \frac{10.000}{2828{,}41} \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \log 1{,}042 > \log \frac{10.000}{2828{,}41}}$

Günstig wäre jetzt eine weitere Umformung mit der. 2. Logarithmusregel:

Sie besagt: $\boxed{\log \frac{a}{b} = \log a - \log b}$. Damit wird die Gleichung so:

$$n \cdot \log 1{,}042 > \log 10.000 - \log 2828{,}41$$

Nun muss man nur noch durch log 1,042 dividieren und hat das Ziel vor Augen:

$$n > \frac{\log 10.000 - \log 2828{,}41}{\log 1{,}042} \approx 30{,}695$$

```
log 10000-log 2828.4
     log 1.042
             30.69544787
```

Hinweis: Zu einem Logarithmus gehört stets die Angabe, auf welche Basis man sich bezieht.

Taschenrechner haben u. a. die Taste $\boxed{\log}$, und dann sind es Zehnerlogarithmen.

Die Rechnung $\log 5 \approx 0{,}7$ heißt eigentlich $\log_{10} 5 \approx 0{,}7$ und bedeutet: $10^{0{,}7} \approx 5$

Ergebnis: Also wird es noch 31 Jahre dauern, bis der Kontostand 30.000 € überschritten hat. Immer unter der Annahme, dass es sonst keine Veränderungen am Konto gibt.

Nun eine ganz neue Aufgabe: Es geht um Bakterien.

m(t) sei eine Menge von Bakterien einer Beobachtungsreihe zum Zeitpunkt t. Sie wächst exponentiell gemäß der Formel: $\boxed{m(t) = 50 \cdot 1{,}4^t}$, wobei t die **Zeit in Stunden** ist, $t \in \mathbb{N}_0$.

a) Erkläre, was die Zahlen 50 und 1,4 in dieser Gleichung bedeuten.

b) Berechne die nach 5 Stunden vorhandene Menge Bakterien.

c) Zu welchem Zeitpunkt hat der Bakterienstamm mehr als 100.000 Individuen?

Es geht jetzt weiter auf Seite 3. Dort befindet sich der nächste Abschnitt $\Rightarrow$ $\boxed{11}$

$\boxed{20}$ Damit ist die erste Schulstunde zum Thema Wachstum beendet.

Es ging um prozentuale (exponentielle) Zunahme.
In der nächsten Stunde behandeln wir die prozentuale (exponentielle) Abnahme.

Dann folgt das beschränkte Wachstum usw. **CIAO !**